Introducción

María de Paz y José Ferreirós

El pensamiento geométrico es una de las raíces fundamentales de las matemáticas, además de constituir un puente clave en su relación con las demás ciencias. Las ideas geométricas no dejan nunca de inspirar desarrollos y soluciones en el terreno matemático, ni siquiera en campos aparentemente muy alejados (como puede ser la combinatoria o la lógica). Más aún, en momentos clave de la historia del pensamiento, la geometría ha liderado corrientes innovadoras, cuyo impacto acabó alcanzando a múltiples ramas del saber científico y filosófico. Basta pensar en lo que supuso el desarrollo de la geometría en Grecia y en lo que representó la revolución de las geometrías no euclidianas en el siglo XIX. El primero de esos episodios tuvo impacto en la astronomía y la mecánica, pero también en las ideas de Platón o Aristóteles; el segundo impactó dentro y fuera de las matemáticas, en física ciertamente, pero sobre todo en la propia idea de lo que es el conocimiento científico y el conocimiento matemático.[1]

Y, sin embargo, en el último siglo la reflexión filosófica sobre la geometría ha tenido poca preponderancia. Tras un período de grandes ideas y reflexiones, desde Kant y Gauss en torno a 1800, hasta Poincaré, Hilbert y Einstein, se produjo un cierto abandono de la filosofía de la geometría, debido sin duda a la aparición de otros temas muy interesantes.[2] En esos años, la matemática (cada vez más *pura* y purista) se separó en cierta medida de las ciencias naturales, y —en paralelo a ello— los problemas del es-

[1] Diversos capítulos de este libro tratan de dichos episodios.

[2] Cabe mencionar aquí el nombre de Kurt Gödel, por citar solo uno; los problemas de fundamentos de las matemáticas, en los años 1920 y 1930, dejaron a un lado la geometría para centrarse más en la lógica, los formalismos axiomáticos o la teoría de conjuntos.

pacio y la geometría quedaron más bien en manos de filósofos de la física. Todavía hoy se perciben los efectos de esa división, que en nuestra opinión no respeta la riqueza de temas propios de lo que en esencia es la geometría: el pensar geométrico.

Este volumen aspira, precisamente, a reabrir la discusión sobre la geometría, su génesis y su devenir. Y, sin embargo, no es un texto solo para expertos, sino que se dirige a un público amplio. Hemos tratado de repensar diversos aspectos de lo que fue (y es) la ciencia del espacio y las figuras, promoviendo una mirada multidisciplinar sobre la cuestión. Hemos querido dirigirnos a un público numeroso y diverso, porque estamos convencidos de que son muchas las personas que sienten interés por estas cuestiones. Personas con formación científica, en general, no solo estudiantes y profesores; matemáticos, claro, pero también científicos; filósofos interesados en el pensamiento científico, hombres y mujeres interesados en la historia de las ciencias y en una comprensión más profunda del pensamiento científico.

Un enfoque multidisciplinar

No se trata de una frase hecha: por las páginas que siguen circulan ideas y resultados provenientes de campos del saber muy diversos, aunque todos ellos coordinados desde el ámbito de la historia y la filosofía de las ciencias. Uno de los elementos característicos de esta obra es que presta especial atención a lo que, verdaderamente, cabe llamar los orígenes de la geometría.

El pensamiento geométrico está profundamente enraizado en las capacidades cognitivas humanas, pero su maduración exigió el desarrollo de prácticas culturales muy específicas. En la primera parte de la obra, «De la cognición básica a la protogeometría», se dan cita las ciencias cognitivas, la arqueología, la historia comparada y las reflexiones de grandes clásicos como Helmholtz y Poincaré.

Las cuestiones investigadas incluyen las siguientes: ¿cuáles son los elementos cognitivos en que se apoya el conocimiento geométrico?,[3] ¿qué papel desempeñan ingredientes culturales como los diseños, los diagramas, es decir, elementos simbólicos o semióticos muy específicos?, ¿en qué me-

[3] Nos referimos aquí a las ciencias cognitivas en general, al estudio de las capacidades cerebrales de percepción, actuación, razonamiento, etc., incluyendo también el papel de los signos y símbolos en el desempeño cognitivo humano.

dida la especie humana está especialmente dotada para el pensamiento espacial?, ¿qué rastros pueden encontrarse, ya en la prehistoria, del origen de conceptos figurales, o de procesos de pensamiento geométricos?

Tres son los firmantes de estos primeros capítulos. Además de uno de los editores, José Ferreirós (Universidad de Sevilla), participa la investigadora del CNRS francés Valeria Giardino (Institut Jean Nicod, Paris) y el doctor Manuel García Pérez, que es tanto filósofo como arqueólogo de formación. En el Instituto Jean Nicod se entrecruza el estudio de problemas filosóficos con la investigación en ciencias cognitivas, y Giardino se ha hecho un lugar de excepción en la intersección entre filosofía de las matemáticas y estudios cognitivos. Por su parte, García Pérez, recién doctorado en la Universidad de Sevilla, ha dedicado su investigación a iluminar el pensamiento protogeométrico combinando la arqueología cognitiva con la historia de las ciencias, y desarrollando un estudio comparado de la información de la que disponemos acerca de Mesopotamia, el mundo griego y el área china prehistórica y antigua.

Frente a algunos especialistas en ciencias cognitivas que tienen tendencia a *naturalizar* demasiado la geometría y hablan —con demasiada alegría— de cómo el pensamiento geométrico es *natural* y casi universal, en esta primera parte se dibujan conclusiones más matizadas. Las primeras formas de geometría no reflejan sin más una estructura fija de la percepción visual, sino que dependieron del desarrollo de herramientas y técnicas que, probablemente, han coevolucionado con las capacidades del cerebro humano. Los humanos nacemos con ciertas capacidades y predisposiciones cerebrales, que por ejemplo nos permiten reconocer ciertos rasgos invariantes en el medio ambiente (invariancias perceptivas), pero es necesaria la aparición de nuevas prácticas y la acumulación cultural de herramientas y saberes para que se formen conceptos geométricos. Diseños y diagramas son herramientas para pensar, que ponen en operación lo que Giardino ha llamado la *imaginación manipulativa*.

Volviendo a la cuestión de la pluralidad de disciplinas que encuentran reflejo en esta obra, la segunda parte, «Escenas del desarrollo de la geometría», está dominada por resultados de la historia y la filosofía de las ciencias. En los últimos años ha habido una intensa dedicación al estudio y análisis de aquello que hizo posible la robusta práctica de la geometría de Euclides, y se han logrado algunas clarificaciones fundamentales. Los antiguos griegos no trabajaban al modo de la matemática moderna, pero lograron integrar el recurso a diagramas y a razonamientos de una manera extraordinariamente convincente y rigurosa. Abel Lassalle Casanave (Universidad Federal de Bahía, Brasil) y José Seoane (Universidad de la República, Uruguay) nos ofrecen algunos resultados fundamentales, tanto propios como ajenos, que se complementan con lo discutido por los jóvenes investigadores Manuel García Pérez y Tamires Dal Magro (Universidad Federal de Santa Catarina, Brasil), en un capítulo que combina los estudios cognitivos con el análisis del clásico griego. Mucho de lo tratado en estos capítulos tiene que ver con una línea de trabajo conocida como «filosofía de las prácticas matemáticas», pero el lector no necesita disponer de ningún conocimiento previo al respecto.

Quizá vale la pena enfatizar que los diagramas son herramientas cognitivas muy especiales. A veces los matemáticos se refieren a ellos como *figuras*, pero un diagrama no es una figura cualquiera. Pensemos en la diferencia entre los diagramas y una simple gráfica: las gráficas resumen y organizan una buena cantidad de información, pero de forma estática; en cambio, los diagramas son fundamentalmente dinámicos, manipulables, desarrollables. Euclides traza un triángulo, digamos, para a continuación manipular la figura y dibujar nuevas líneas, círculos, etc. buscando un análisis de la situación y de las interrelaciones entre esos símbolos.[4] Los *Elementos* de Euclides plantean toda una disciplina de trabajo con diagramas, cuidadosamente *reglada* o *regimentada* por los postulados. Los famosos cinco postulados o *axiomas* pueden pensarse como reglas para la manipulación y el desarrollo de los diagramas, cuyo concurso es imprescindible en la práctica de la demostración euclidiana. Conviene tener en mente la distinción entre figuras y diagramas al seguir las explicaciones de Lassalle Casanave y Seoane, o las de Dal Magro y García Pérez.

Por cierto, a los matemáticos de formación puede parecerles que Euclides es un autor totalmente superado, y su forma de demostrar, un fósil histórico. Sin embargo, la experiencia de leer a Euclides resulta extraordinaria, con esa mezcla de lo estético (el elemento visual) y lo racional, y estamos seguros de que enriquecerá el conocimiento matemático de los lectores, cualquiera que sea su formación. El valor pedagógico y heurístico de estas obras clásicas, situadas en la misma génesis del conocimiento geométrico, es incalculable. El estudio en paralelo del capítulo sobre Hilbert (de Giovannini) y del texto de Lambert (traducido en el capítulo 10) proporciona un recurso magnífico para profundizar en estos temas.

En la parte segunda se presta atención a aspectos a veces desatendidos, como la interconexión extraordinaria entre geometría y astronomía (en

---

[4] Por ejemplo, en la proposición 5 del libro I, muestra como, si un triángulo es isósceles, entonces los ángulos de la base serán iguales entre sí; establece una relación nueva, gracias a esas prácticas diagramáticas. Para lograrlo, se ve en la necesidad de introducir nuevos puntos y triángulos, estudiando así una configuración más compleja que la que es, explícitamente, su objetivo.

todas las culturas, pero muy especialmente desde las aportaciones de Eudoxo y otros) y la relación entre geometría y mecánica, o sea, el estudio de los cuerpos en movimiento. Dos autores muy conocidos, Ana Rioja (Universidad Complutense de Madrid) y Javier Ordóñez (Universidad Autónoma de Madrid), nos ilustran acerca de la «alianza incompleta» entre geometría y astronomía en el mundo griego, mientras que el físico y filósofo Mario Bacelar Valente (Universidad Pablo de Olavide) escribe un capítulo de gran interés acerca de la geometría del movimiento, tema que nos conduce hasta los trabajos de Galileo y Newton.

Es curioso. La tradición occidental, de Platón en adelante, puso gran empeño en resaltar el carácter estático, *atemporal* —y casi divino— de la geometría y sus ideas. Y, sin embargo, los capítulos que mencionamos ponen de manifiesto que siempre ha habido estudios geométricos que tratan de lo temporal, lo mecánico, el movimiento, lo corporal. Sin ellos, sería inconcebible la revolución astronómica y física que marcó el siglo xvii. Llama la atención cómo el original Newton afirmaba que, lejos de que la mecánica dependa de la geometría, en su opinión, el orden de fondo es más bien el contrario: la geometría depende de la mecánica.[5] Con esto, manifestaba de nuevo la oposición casi frontal de su manera de pensar frente al platonismo y el neoplatonismo.

Pero, además, todo lo discutido en la segunda parte y en la tercera («Reflexiones filosóficas») no hace más que resaltar que el pensamiento geométrico está siempre en marcha: es un devenir, y si queremos capturarlo en una definición cerrada, solamente podremos hacerlo forzando la situación. Es decir, olvidando intencionadamente los factores de cambio, los movimientos internos y externos que están, ahora mismo, conspirando para transformar la manera de mirar matemáticamente el mundo y los problemas. Se puede tratar de sintetizar lo que fue la geometría en el siglo xvii, o lo que era esta disciplina a finales del xix, pero los textos resultantes del análisis serán como fotografías instantáneas tomadas de un objeto en movimiento.

Problemas filosóficos del espacio y la geometría

Aunque el estudio de la geometría es muy antiguo, esa disciplina se centraba en investigar las figuras planas o tridimensionales, y en estudiar sus re-

[5] La idea aparece en el mismo Prefacio de los célebres *Principia Mathematica*, su obra capital: la geometría «no es nada más que aquella parte de la Mecánica universal que propone y demuestra con precisión el arte de la medición».

laciones y sus dimensiones (longitudes, áreas, volúmenes). El mayor matemático griego, Arquímedes, se sintió sumamente satisfecho de lograr determinar la relación que hay entre un cilindro y la esfera inscrita en él. Más recientemente, sin embargo, se suele decir que la geometría estudia diversos tipos de espacios; pero la idea del *espacio* como tal es relativamente reciente, se remonta apenas a los inicios de la Modernidad.

Y en el siglo xix, se pasó del espacio a los espacios. Esta idea de que no es *la* geometría, sino muchas geometrías, y no el espacio, sino múltiples tipos de espacios, es una conquista de la matemática moderna, pero señala también un cambio filosófico fundamental. Pensemos en Kant, estudiado en el capítulo de Lassalle Casanave, y en Hilbert, cuya obra es analizada con detalle por Eduardo Giovannini (CONICET, Argentina). El filósofo Kant estaba convencido de que hay una coincidencia perfecta entre el espacio visual (perceptivo), el espacio de la física (de Newton) y el espacio geométrico de Euclides. Cosa extraordinaria: la única estructura espacial concebible racionalmente coincide exactamente, según él, con la estructura del espacio físico.[6] Esta idea de la *armonía preestablecida* entre lo racional y lo real se rompió durante el siglo xix, debido especialmente a la revolución no euclidiana. Pero, aún así, la tesis kantiana de la *intuitividad* de la geometría fue enormemente influyente: establecer una verdad geométrica exigiría siempre *construir* un concepto en lo concreto y singular de la *intuición* del mundo externo (es decir, la forma del espacio).

En la presentación de Hilbert, la geometría tiene unos orígenes intuitivos, cierto, pero el tratamiento axiomático crea una situación radicalmente nueva. El enfoque de Hilbert no es híbrido (como el de Euclides),[7] sino puramente lógicolingüístico, basado en la formalización y la abstracción; por ello deja totalmente atrás lo intuitivo. Es posible estudiar diversos tipos de geometrías (euclidiana o no; proyectiva o métrica; arquimediana o no-arquimediana) y cada una de ellas delinea un *concepto* abstracto de espacio. Un autor que, sin saberlo del todo, preparó esta transformación fue el matemático y filósofo J.H. Lambert: en el capítulo preparado por Eduardo Dorrego y por Ferreirós, se encontrará un texto —original y traducido aquí al castellano por vez primera— con una discusión luminosa y profunda de los métodos de Euclides, pero también una descripción de cómo

---

[6] La doctrina de Kant dará una explicación plausible de ello (primando lo perceptivo sobre lo físico), pero no nos interesa aquí detallar esta cuestión ni considerar sus vericuetos. Véase el capítulo correspondiente.

[7] Nos referimos aquí al carácter híbrido que tienen las demostraciones euclidianas, al depender no solo de las proposiciones que se hacen en el texto, sino también de los diagramas.

Lambert investigó —a su pesar— la geometría hiperbólica[8] y dio pistas que orientaron a sus continuadores.

Con la visión de Lambert —y sobre todo con los que cabe considerar sus sucesores: Gauss, Bolyai, Lobachevskii— contrasta el enfoque de un joven Bolzano, discutido por dos excelentes investigadores, Elías Fuentes Guillén (Academia de Ciencias de Praga) y Davide Crippa (Universidad Ca' Foscari, Italia): en 1804, Bolzano trataba de reformar a fondo la presentación de la geometría, guiado todavía por el ideal de un sistema geométrico único. Para este sistema había que encontrar el verdadero y *único* orden de sus razones: enfoque que contrasta enormemente con la gran libertad de pensamiento axiomático planteada por Hilbert.

Por el camino que, según hemos dicho, describió Hilbert fue, precisamente, cómo se fue olvidando la pregunta por la epistemología de la geometría. Los matemáticos afirmaban que, desde su punto de vista, no hay diferencias entre los distintos tipos de geometría (o espacios); los físicos pueden elegir a voluntad la estructura del espacio-tiempo que resulte más adecuada y conveniente para desarrollar sus teorías.[9] Pero estas respuestas, hoy muy conocidas, no resuelven todos los interrogantes que plantea el conocimiento geométrico. Por supuesto, el lector encontrará un capítulo dedicado a las reflexiones en torno a las relaciones de la geometría con la experiencia, firmado por María de Paz, en el cual se presentan las ideas de tres figuras señeras: Riemann, el gran innovador; Poincaré, el original filósofo de la geometría; y Einstein, el gran físico.

Reencontramos aquí, justamente, la cuestión de la multidisciplinariedad del tema: hoy se necesitaría, como mínimo, una perfecta integración entre matemática, física, historia de las ciencias, filosofía, lógica y ciencias cognitivas para dar respuesta a todos los interrogantes epistemológicos. De ahí la orientación de nuestra obra, que, dentro de sus límites, pretende reabrir esa cuestión.

Algunas tesis características

Lo que Kant llamó *intuición* del espacio no es un simple *dato* de la actividad consciente o mental, sino que se forma en conexión con acciones, en

[8] Se llama *hiperbólica* a la geometría no-euclidiana estudiada por Lobachevskii y Bolyai, basada en una alternativa al axioma de las paralelas, como se verá en capítulos de la tercera parte.

[9] Se trata del espacio-tiempo como variedad riemanniana, en el caso de la Relatividad General. Sobre este tema se ha escrito y se escribe muchísimo, pero tampoco aquí —ni mucho menos— se suelen discutir todos los aspectos relevantes del «problema del espacio».

la interacción con el medio físico-natural. Como resaltaron Helmholtz, Piaget y otros, es fruto de nuestra constitución fisiológica, pero también de la experiencia con objetos físicos. Además, en dichas acciones pueden llegar a intervenir *representaciones* externas; para explicar a qué nos referimos, sin grandes complicaciones, pensemos en un simple mapa que nos ayuda a encontrar el camino, o en un diagrama que plantea ciertas relaciones entre líneas y ángulos.

Considerando la complejidad de estos procesos, varios de los autores de esta obra llegamos a la conclusión de que se deben diferenciar al menos *tres niveles* de elaboración cognitiva: un primer nivel sería el de las invariancias perceptivas, el de las capacidades cognitivas más básicas que nos permiten reconocer objetos o navegar el medio ambiente; el segundo nivel, ya propiamente humano, es el de lo que Giardino llama «diagramación»: el uso de símbolos escritos, o aún de simples gestos, como medios de representación que potencian nuestra capacidad de pensar.[10] Por fin, el tercer nivel sería el propiamente geométrico, en el que se elabora un estudio teórico de las figuras, sus proporciones y sus relaciones. A partir de ahí, entraríamos en la historia de la geometría, en sentido propio: lo estudiado en las partes segunda y tercera de este libro.

En relación con el segundo nivel de elaboración, se constituye lo que Ferreirós y García Pérez llaman la «protogeometría»: pretendemos hablar de conocimientos rudimentarios, que aún no son propiamente geométricos, pero que ya emplean representaciones externas para considerar las formas espaciales, y algunas de sus propiedades. Es a este nivel que surgen categorías mentales (y palabras) para especificar algunas formas simples: lo circular, lo cuadrado, lo rectangular.[11] Se van conformando algunos conceptos geométricos básicos, mejor o peor definidos, y se van planteando cuestiones elementales. Un ejemplo simple, pero que curiosamente se encuentra una y otra vez en distintas culturas, es la pregunta de cómo se relacionan un círculo y el cuadrado que podemos circunscribir en torno a él (Figura 1).

---

[10] El lector notará que, cuando hablamos de lo cognitivo, no nos limitamos a procesos (digamos) internos al cerebro, sino que consideramos el modo en que acciones, herramientas y diseños potencian nuestra *vida mental*.

[11] Aunque hay que tener cuidado: no tienen por qué surgir todos los conceptos que hoy nos resultan tan familiares. La idea de ángulo, por ejemplo, ni siquiera fue resaltada en la geometría china antigua. El *gou gu* chino no es un triángulo (aunque a propósito de él se discute lo que solemos llamar el «teorema de Pitágoras»), sino una figura formada por dos segmentos, uno horizontal y otro vertical (como un gnomon rectangular o una escuadra, puesta sobre la horizontal).

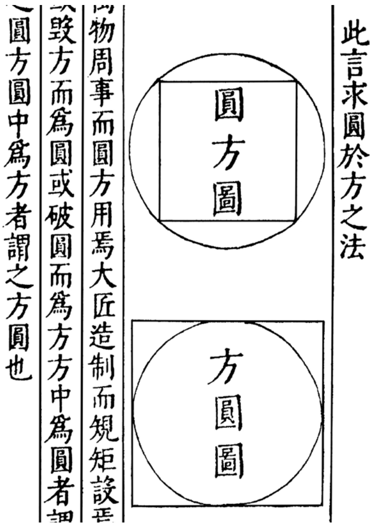

Figura 1. En el *Zhou bi suan jing*, tratado clásico chino de la astronomía, se plantea la cuestión de *circular el cuadrado* y *cuadrar el círculo*. El texto afirma que «el cuadrado y el círculo son de aplicación universal en todas las actividades de la miríada de cosas», esto es, del universo.[12]

Hablamos de *proto*geometría precisamente para resaltar que no se trata aún de conocimiento geométrico en el sentido propio. Sin embargo, ya hay aquí todo un impacto de la cultura material sobre nuestra cognición, una coevolución de las capacidades biológicas humanas y las culturales; y tiene lugar un proceso de acumulación cultural de herramientas, representaciones y prácticas asociadas a las mismas que acabará permitiendo el surgimiento de la geometría.[13] Con todo, se está muy lejos de la orientación teórica (no práctica) y de las idealizaciones (como la noción de punto) que caracterizan a Euclides. Nuestra *intuición* de las figuras —basada en experiencia y práctica, no kantiana en sentido estricto— parece estar más cerca de lo que explora el *Zhou bi*, que del sutil entramado de conceptos y axiomas en los *Elementos*.

La geometría aparecerá en otro contexto: el de culturas complejas y diversificadas, cuando ya se fijen un lenguaje especializado y unos medios de construcción (herramientas cognitivas a la vez que útiles culturales, como el compás o la escuadra) mediante los cuales se logra investigar con preci-

---

[12] Cullen, C. 1996. *Astronomy and mathematics in ancient China: the Zhou bi suan jing*. Cambridge University Press, pp. 181-182. La figura se toma del Chinese Text Project, un recurso de acceso abierto: <https://ctext.org.>

[13] El capítulo sobre prehistoria de García Pérez profundiza en estas cuestiones.

sión las propiedades de las formas geométricas. Los actores de esta transformación son, por ejemplo, los escribas babilonios; un problema tipo, el de calcular (aproximadamente) el área de un terreno más o menos irregular.

Ahora bien, otra de las tesis características de nuestro trabajo es que la geometría y su desarrollo no pueden entenderse atendiendo solamente a los aspectos «internos» a la matemática (si es que tiene sentido hablar así).[14] Por eso en la parte segunda se presta atención a aspectos a veces desatendidos, como la interconexión entre geometría y astronomía (en todas las culturas, pero muy especialmente desde los griegos) y la relación entre geometría y mecánica, esto es, el estudio de los cuerpos en movimiento. Son elementos que han marcado el desarrollo posterior del pensamiento acerca de la naturaleza: todos somos herederos suyos en cuanto a la forma de interrogarnos por las regularidades o leyes que rigen el comportamiento de los cuerpos.

Temas ausentes

E. T. Bell decía que la geometría es una cámara del tesoro riquísima —más rica que cualquier otra rama de las matemáticas—, llena de cosas interesantes y medio olvidadas, que una generación con grandes prisas no tiene tiempo para disfrutar.[15] Cabe pensar, incluso, que el cultivo de la geometría permitiría a muchos jóvenes descubrir lo interesantes que son las matemáticas, cuando se va más allá de la rutina y el tedio de aplicar fórmulas y calcular. Pero así son las cosas, estamos muy lejos de la *dieta matemática* que recomendaron Pitágoras y Platón, y que disfrutaron generaciones y generaciones hasta aproximadamente 1970.

Ante una disciplina tan inmensa, tan antigua y tan rica, es absolutamente imposible que un volumen le haga justicia. Al elegir temas sobre los que tratar, hemos sido selectivos y hemos plasmado nuestros intereses de los últimos años (a veces, décadas). Pero a cualquiera que conozca el tema, ojeando el índice de contenidos, le saltarán a la vista lagunas considerables. Una de las más llamativas es la contribución de Descartes, cuya *Geometría* de 1637 cambió la idea de lo que es «exactitud geomé-

[14] Lo tiene hoy en día, claro, pero resulta anacrónico y desajustado al aplicarlo a etapas anteriores de la historia. Incluso en el siglo xviii, los límites de «las matemáticas» incluían mucho más de lo que abarcan hoy: mecánica, balística, fortificaciones, etc.

[15] Citado en H. S. M. Coxeter y S. L. Greitzer, *Geometry Revisited* (Mathematical Association of America 1967), p. 1.

trica» e introdujo nuevos métodos que determinaron el futuro de la geometría y el análisis.[16] Quizá puede valer en nuestro descargo el hecho de que estas contribuciones se estudian magistralmente en numerosas obras de historia de las matemáticas. Tampoco la geometría diferencial se estudia con detalle, siendo como es un elemento clave para entender el progreso de Gauss a Riemann y a Einstein (el tema sería demasiado técnico).

El siglo XIX fue una época de redefinición de todo el ámbito de las matemáticas, preparando el camino hacia la matemática moderna y las estructuras abstractas. Esto, que vale para todas las ramas de la disciplina, se aplica en particular a la geometría. El siglo XIX fue la época dorada de la geometría proyectiva, que comenzó a bucear en estructuras más profundas del espacio, anteriores a la métrica. Ya en 1890 había triunfado el dicho de A. Cayley según el cual la geometría proyectiva es el todo de la geometría; por ejemplo, las geometrías no-euclidianas de curvatura constante habían encontrado asiento en el campo de la proyectiva. El pensamiento estructural avanzaba en geometría de la mano de las ideas de Klein y otros: cada tipo de geometría se corresponde con el estudio de los invariantes bajo un grupo de transformaciones (es la idea clave del llamado *programa de Erlangen*).[17] Pero tampoco estos grandes avances se estudian en detalle, aunque sean mencionados aquí o allá.

En todo caso, poco duró el imperio de la geometría proyectiva, que hoy apenas se estudia en las facultades de Matemáticas. Justamente entonces, en la década de 1890, Poincaré daba un impulso fundamental a la topología (avistada ya en los trabajos de Riemann), y justamente en 1900 las nuevas ideas de la axiomática revolucionarían el terreno de la geometría e impulsarían el pensamiento estructural más allá de los grupos de transformaciones. Al menos aquí, respecto a este punto, los lectores encontrarán un iluminador capítulo de Giovannini.

---

[16] Un importante estudio es el de H. Bos, *Redefining geometrical exactness* (Springer Verlag 2000).

[17] Citaremos aquí solo dos obras que tratan de estos temas: Gray, J. J. 2007. *Worlds out of Nothing.* Springer Verlag; y G. Schiemer y E. Reck (eds.). 2020. *The Prehistory of Mathematical Structuralism.* Oxford University Press.